

UN PROCESSUS PONCTUEL ASSOCIÉ AUX MAXIMA LOCAUX DU MOUVEMENT BROWNIEN

Christophe LEURIDAN

Résumé

Soit $B = (B_t)_{t \in \mathbf{R}}$ un mouvement brownien symétrique, c'est-à-dire un processus tel que $(B_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ et $(B_{-t})_{t \in \mathbf{R}_+}$ sont deux mouvements browniens indépendants issus de 0. Pour $a \geq b > 0$ fixés, nous décrivons la loi de l'ensemble

$$\mathcal{M}_{a,b} = \{t \in \mathbf{R} : B_t = \max_{s \in [t-a, t+b]} B_s\}.$$

Nous relierons cet ensemble au fermé régénératif

$$\mathcal{R}_a = \{t \in \mathbf{R}_+ : B_t = \max_{s \in [(t-a)_+, t]} B_s\},$$

et nous donnons la mesure de Lévy d'un subordonateur dont l'image fermée est \mathcal{R}_a .

Classification mathématique : 60J65, 60G55.

Mots-clés : mouvement brownien, maximum local, processus ponctuel, renouvellement, fermé régénératif, subordonateur.

1 Introduction

On considère un mouvement brownien symétrique $B = (B_t)_{t \in \mathbf{R}}$: autrement dit, $(B_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ et $(B_{-t})_{t \in \mathbf{R}_+}$ sont deux mouvements browniens indépendants issus de 0. Le but de cet article est d'étudier l'ensemble \mathcal{M} des instants où $(B_t)_{t \in \mathbf{R}}$ atteint un maximum local. On vérifie facilement que presque sûrement, \mathcal{M} est dénombrable et dense dans \mathbf{R} : il suffit par exemple de montrer qu'il y a un unique instant réalisant le maximum sur tout intervalle d'extrémités rationnelles.

Le fait qu'un instant donné soit un maximum local ne dépend que des accroissements du mouvement brownien au voisinage de cet instant. L'indépendance des accroissements du mouvement brownien suggère donc que l'ensemble \mathcal{M} est sans mémoire, mais encore faut-il donner un sens à cette affirmation. Une façon serait de construire un processus de Poisson ponctuel qui prenne des valeurs précisément aux instants où B atteint un maximum local.

Dans [12], Tsirelson montre que cela est possible, puisqu'on peut construire une suite $(T_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[0, 1]$ telle que l'ensemble des valeurs $\{T_n; n \in \mathbf{N}\}$ soit exactement l'ensemble des instants de $[0, 1]$ où le mouvement brownien réalise un minimum local. En fait, cette propriété est partagée par de nombreux ensembles aléatoires dénombrables denses. Par ailleurs, la loi uniforme sur $[0, 1]$ peut être remplacée par n'importe quelle loi à densité partout strictement positive sur $[0, 1]$.

Mais la construction de Tsirelson est faite dans un espace probabilisé plus gros que celui sur lequel est défini le mouvement brownien : le produit de l'espace de Wiener par $[0, 1]^\infty$. On peut donc se demander si ce type de construction est possible sans apport d'aléa extérieur.

Une idée consiste à associer à tout instant t le plus grand intervalle I_t contenant t sur lequel B reste inférieur ou égal à B_t . Autrement dit, $I_t = [t - U_t, t + V_t]$, où $U_t = \inf\{s > 0 : B_{t-s} > B_t\}$ et $V_t = \inf\{s > 0 : B_{t+s} > B_t\}$. L'instant t est un maximum local si et seulement si $\min(U_t, V_t) > 0$. Dans ce cas, nous dirons que U_t et V_t sont les portées à gauche et à droite du maximum local à l'instant t .

Mais on vérifie facilement que les intervalles I_s et I_t associés à deux instants $s < t$ sont disjoints si le mouvement brownien dépasse $\max(B_s, B_t)$ pendant l'intervalle $[s, t]$ et emboîtés dans le cas contraire. Ce fait est une obstruction au fait que $(\min(U_t, V_t))_{t \in \mathbf{R}}$ soit un processus de Poisson ponctuel puisqu'il possède une mémoire.

Dans la suite, nous allons décrire la loi de l'ensemble $\mathcal{M}_{a,b} = \{t \in \mathbf{R} : U_t \geq a; V_t \geq b\}$ pour $a > 0$ et $b > 0$ fixés. Cet ensemble est formé d'instant isolés, séparés d'au moins $\min(a, b)$. Nous montrons que les durées entre les instants successifs de $\mathcal{M}_{a,b}$ forment des variables aléatoires indépendantes et de même loi, et nous décrirons cette loi.

Une méthode pour montrer l'indépendance et l'équidistribution des durées consiste à relier $\mathcal{M}_{a,b}$ au fermé régénératif $\mathcal{R}_a = \{t \in \mathbf{R}_+ : B_t = \max_{s \in [(t-a)_+, t]} B_s\}$. Inversement, nous utilisons des renseignements obtenus directement sur $\mathcal{M}_{a,b}$ pour décrire la mesure de Lévy d'un subordonateur dont l'image fermée est le fermé régénératif \mathcal{R}_a .

Signalons que dans [10], J. Neveu et J. Pitman ont obtenu des résultats similaires sur les extrema de profondeur supérieure ou égale à h fixé, appelés « h -extrema » par les auteurs. Avec nos notations, si t est un instant de maximum local, sa profondeur est la plus petite des quantités

$$B_t - \min_{s \in [t-U_t, t]} B_s \text{ et } B_t - \min_{s \in [t, t+V_t]} B_s.$$

Pour un minimum local, la définition est symétrique.

2 Calculs direct de certaines lois associées aux maxima locaux.

Pour tous réels $s < t$, notons $\rho(s, t)$ le plus petit instant de $[s, t]$ réalisant le maximum de B sur $[s, t]$ et introduisons les dénivellations à gauche et à droite correspondantes :

$$G_{s,t} = B_{\rho(s,t)} - B_s \text{ et } D_{s,t} = B_{\rho(s,t)} - B_t$$

Ces variables aléatoires sont mesurables pour la tribu $\mathcal{F}_{s,t}$ engendrée par les accroissements du mouvement brownien entre s et t . Leur utilisation est rendue commode du fait que les tribus $\mathcal{F}_{s,t}$ associées à des intervalles d'intérieurs deux à deux disjoints sont indépendantes.

L'indépendance permet de montrer facilement le résultat classique ci-dessous, qui constitue le lemme 13.15 de [6].

Lemme 1 (Comparaison des maxima locaux) *Preque sûrement, les valeurs des maxima locaux de B sont toutes différentes.*

Comme presque sûrement, le maximum de B sur un segment fixé non réduit à un point n'est pas atteint aux extrémités, il est donc réalisé en un unique point intérieur.

Le résultat ci-dessous constitue la brique élémentaire des calculs ultérieurs.

Proposition 2 *Soient $s < t$ deux réels. Le triplet $(\rho(s, t), G_{s, t}, D_{s, t})$ a même loi que*

$$(s \cos^2 \Theta + t \sin^2 \Theta, \sqrt{2X}\sqrt{t-s} \sin \Theta, \sqrt{2Y}\sqrt{t-s} \cos \Theta)$$

où Θ , X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, Θ de loi uniforme sur $[0, \pi/2]$, X et Y de loi exponentielle de paramètre 1.

Démonstration. Pour démontrer ce résultat, on peut se limiter au cas où $s = 0$ par stationnarité des accroissements. Mais en notant $S_t = \max\{B_s ; s \in [0, t]\}$, on a $G_{0, t} = S_t$ et $D_{0, t} = S_t - B_t$. La densité du triplet $(\rho(0, t), S_t, B_t)$ est connue (voir [7] ou le lemme 4 de [8] ou la généralisation dans [3]) : en tout (r, a, b) tel que $0 < r < t$ et $a > \max(0, b)$, elle vaut

$$\frac{a(a-b)}{\pi r^{3/2}(t-r)^{3/2}} \exp\left(\frac{-a^2}{2r}\right) \exp\left(\frac{-(a-b)^2}{2(t-r)}\right).$$

Cela montre que $\rho(0, t)$ suit la loi arcsinus sur l'intervalle $[0, t]$ et que conditionnellement à $\rho_t = r$, les variables aléatoires $\frac{S_t^2}{2r}$ et $\frac{(S_t - B_t)^2}{2(t-r)}$ sont indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1. \square

Corollaire 3 *Soient $s < t$ deux réels. Quels que soient $\alpha, \beta \geq 0$,*

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(-\frac{\alpha G_{s, t}^2 + \beta D_{s, t}^2}{2}\right)\right] = \frac{1}{\alpha + \beta + \alpha\beta} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha}} + \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta}}\right).$$

Démonstration. Utilisons l'identité en loi de la proposition. En conditionnant par rapport à Θ , et en effectuant le changement de variable $t = \tan \theta$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[\exp\left(-\frac{\alpha G_{0, 1}^2 + \beta D_{0, 1}^2}{2}\right)\right] &= \mathbf{E}\left[\exp(-\alpha X \sin^2 \Theta) \exp(-\beta Y \cos^2 \Theta)\right] \\ &= \mathbf{E}\left[\frac{1}{1 + \alpha \sin^2 \Theta} \times \frac{1}{1 + \beta \cos^2 \Theta}\right] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 + \alpha \sin^2 \theta)(1 + \beta \cos^2 \theta)} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{(1 + t^2)(1 + \frac{\alpha t^2}{1+t^2})(1 + \frac{\beta}{1+t^2})} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1 + t^2)dt}{(1 + (1 + \alpha)t^2)((1 + \beta) + t^2)} \end{aligned}$$

On remarque ensuite que

$$\frac{\alpha}{1 + (1 + \alpha)t^2} + \frac{\beta}{(1 + \beta) + t^2} = \frac{(\alpha + \beta + \alpha\beta)(1 + t^2)}{(1 + (1 + \alpha)t^2)((1 + \beta) + t^2)},$$

pour en déduire la formule ci-dessus. \square

3 Application à l'étude de $\mathcal{M}_{a,b}$ pour $a \geq b > 0$: fonctions de corrélation

Soient $a \geq b > 0$. Nous allons décrire la mesure de comptage $N_{a,b}$ associée à $\mathcal{M}_{a,b}$: pour tout borélien A de \mathbf{R} , $N_{a,b}(A) = \text{Card}(\mathcal{M}_{a,b} \cap A)$. Commençons par quelques remarques simples.

Remarque 4 (Propriétés simples de $N_{a,b}$)

1. Deux points de $\mathcal{M}_{a,b}$ ne peuvent pas être à une distance inférieure à b . Par conséquent, si le diamètre de A est inférieur à b , $N_{a,b}(A)$ vaut 0 ou 1, suivant que le maximum de B sur A ait ou non des portées supérieures ou égales à a et b .
2. Comme la loi de $\mathcal{M}_{a,b}$ est invariante par translation, la mesure $A \mapsto \mathbf{E}[N_{a,b}(A)]$ est un multiple de la mesure de Lebesgue.
3. La variable aléatoire $N_{a,b}(A)$ ne dépend que des accroissements du mouvement brownien sur l'ensemble $A + [-a, b]$. A cause de l'indépendance des accroissements du mouvement brownien, les variables aléatoires comptant les points de $\mathcal{M}_{a,b}$ dans des parties distantes d'au moins $a + b$ sont indépendantes.

Nous allons démontrer le résultat suivant

Théorème 5 *Le processus ponctuel $\mathcal{M}_{a,b}$ possède des fonctions de corrélation : pour tout entier $n \geq 1$,*

$$\mathbf{E}[N_{a,b}(dt_1) \cdots N_{a,b}(dt_n)] = f_n(t_1, \dots, t_n) dt_1 \cdots dt_n,$$

où $f_n : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ est la fonction symétrique de n variables réelles définie par

$$f_n(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{\pi\sqrt{ab}} \prod_{k=1}^{n-1} h_{a,b}(t_{k+1} - t_k).$$

pour (t_1, \dots, t_n) tel que $t_1 \leq \dots \leq t_n$, avec

$$h_{a,b}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq b \\ \frac{1}{\pi r} \sqrt{\frac{r-b}{b}} & \text{si } b \leq r \leq a \\ \frac{1}{\pi r} \left(\sqrt{\frac{r-b}{b}} + \sqrt{\frac{r-a}{a}} \right) & \text{si } a \leq r \leq a+b \\ \frac{1}{\pi\sqrt{ab}} & \text{si } r \geq a+b \end{cases}$$

Démonstration. Soit $t \in \mathbf{R}$. Pour tout $\epsilon \in]0, b[$, l'intervalle $[t, t + \epsilon]$ contient au plus un point de $\mathcal{M}_{a,b}$ et

$$\rho(t - a, t + b + \epsilon) \in [t, t + \epsilon] \implies N_{a,b}([t, t + \epsilon]) = 1 \implies \rho(t - a + \epsilon, t + b) \in [t, t + \epsilon].$$

Ces implications fournissent un encadrement de $N_{a,b}([t, t + \epsilon])$, mais comme cet encadrement est lourd à manipuler, nous écrirons de façon heuristique

$$N_{a,b}(dt) = 1 \iff \rho(t - a, t + b) \in dt,$$

d'où

$$\mathbf{E}[N_{a,b}(dt)] = \frac{dt}{\pi\sqrt{ab}},$$

ce qui donne la fonction de corrélation pour $n = 1$.

Intéressons-nous à présent au cas où $n \geq 2$. Soient $t_1 < \dots < t_n$.

Si $t_{k+1} - t_k < b$ pour un certain $k \in [1 \dots n - 1]$, alors $N_{a,b}(dt_k)N_{a,b}(dt_{k+1}) = 0$ et $h_{a,b}(t_{k+1} - t_k) = 0$, et le résultat est évident.

Si $t_{k+1} - t_k > a + b$ pour un certain $k \in [1 \dots n - 1]$, alors $N_{a,b}(dt_1) \dots N_{a,b}(dt_k)$ est indépendante de $N_{a,b}(dt_{k+1}) \dots N_{a,b}(dt_n)$ d'où

$$\mathbf{E}[N_{a,b}(dt_1) \dots N_{a,b}(dt_n)] = \mathbf{E}[N_{a,b}(dt_1) \dots N_{a,b}(dt_k)] \mathbf{E}[N_{a,b}(dt_{k+1}) \dots N_{a,b}(dt_n)].$$

Mais on a aussi

$$f_n(t_1, \dots, t_n) = f_k(t_1, \dots, t_k) f_{n-k}(t_{k+1}, \dots, t_n)$$

grâce au fait que $h_{a,b}(t_{k+1} - t_k)$ est égal à l'intensité $\frac{1}{\pi\sqrt{ab}}$ du processus ponctuel.

Ce raisonnement montre qu'on peut donc se limiter au cas où $b \leq t_{k+1} - t_k \leq a + b$ pour tout $k \in [1 \dots n - 1]$. Pour alléger l'écriture, nous nous limitons à deux instants $s < t$ tels que la différence $r = t - s$, le cas général ne différant que par la lourdeur des expressions.

Si $b \leq t - s \leq a$, alors $s - a \leq t - a \leq s \leq s + b \leq t \leq t + b$. Donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[N_{a,b}(ds)N_{a,b}(dt)] &= P[\rho(s - a, s + b) \in ds ; \rho(t - a, t + b) \in dt] \\ &= P[\rho(s - a, s + b) \in ds ; D_{s-a, s+b} < G_{s+b, t+b} ; \\ &\quad \rho(s + b, t + b) \in dt] \end{aligned}$$

Conditionnellement à $(\rho(s - a, s + b), \rho(s + b, t + b)) = (s, t)$ les variables aléatoires $Y = D_{s-a, s+b}^2/2b$ et $X = G_{s+b, t+b}^2/2(r - b)$ sont indépendantes et de loi exponentielle de paramètre 1 et la probabilité pour que $(r - b)X > bY$ vaut donc $(r - b)/r$. Donc

$$\mathbf{E}[N_{a,b}(ds)N_{a,b}(dt)] = \frac{ds}{\pi\sqrt{ab}} \frac{dt}{\pi\sqrt{(r-b)b}} \frac{r-b}{r} = \frac{ds}{\pi\sqrt{ab}} \frac{1}{\pi r} \sqrt{\frac{r-b}{b}} dt.$$

Si $a \leq t - s \leq a + b$, alors $s - a \leq s \leq t - a \leq s + b \leq t \leq t + b$. En conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_{t-a, s+b}$, on trouve

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[N_{a,b}(ds)N_{a,b}(dt)] &= P[\rho(s - a, s + b) \in ds ; \rho(t - a, t + b) \in dt] \\ &= P[\rho(s - a, t - a) \in ds ; D_{s-a, t-a} > G_{t-a, s+b} ; \\ &\quad D_{t-a, s+b} < G_{s+b, t+b} ; \rho(s + b, t + b) \in dt] \\ &= \frac{ds}{\pi\sqrt{a(r-a)}} \times \frac{dt}{\pi\sqrt{b(r-b)}} \\ &\quad \mathbf{E}\left[\exp\left(-\frac{G_{t-a, s+b}^2}{2(r-a)} - \frac{D_{t-a, s+b}^2}{2(r-b)}\right)\right]. \end{aligned}$$

Mais par changement d'échelle,

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(-\frac{G_{t-a, s+b}^2}{2(r-a)} - \frac{D_{t-a, s+b}^2}{2(r-b)}\right)\right] = \mathbf{E}\left[\exp\left(-\frac{\alpha G_{0,1}^2 + \beta D_{0,1}^2}{2}\right)\right]$$

avec

$$\alpha = \frac{a + b - r}{r - a}, \quad \beta = \frac{a + b - r}{r - b}.$$

Comme

$$1 + \alpha = \frac{b}{r-a}, \quad 1 + \beta = \frac{a}{r-b},$$

$$\alpha + \beta + \alpha\beta = (1 + \alpha)(1 + \beta) - 1 = \frac{ab - (r-a)(r-b)}{(r-a)(r-b)} = \frac{r(a+b-r)}{(r-a)(r-b)},$$

on a donc d'après le corollaire

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[\exp\left(-\frac{\alpha G_{0,1}^2 + \beta D_{0,1}^2}{2}\right)\right] &= \frac{(r-a)(r-b)}{r(a+b-r)} \left(\frac{a+b-r}{\sqrt{b(r-a)}} + \frac{a+b-r}{\sqrt{a(r-b)}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{(r-a)(r-b)}}{r\sqrt{ab}} (\sqrt{a(r-b)} + \sqrt{b(r-a)}), \end{aligned}$$

d'où le résultat. \square

Remarque 6 (Etude du maximum de la fonction $h_{a,b}$)

Si $a \leq 4b$, la fonction $h_{a,b}$ est majorée par sa limite en $+\infty$. Autrement dit, la probabilité pour qu'il y ait un point de $\mathcal{M}_{a,b}$ au voisinage d'un instant t sachant que $s \in \mathcal{M}_{a,b}$ est maximum pour $|t-s| \geq a+b$: les points de $\mathcal{M}_{a,b}$ « se repoussent ».

En revanche, si $a > 4b$, la fonction $h_{a,b}$ possède un maximum global strict en $2b$: la probabilité pour qu'il y ait un point de $\mathcal{M}_{a,b}$ au voisinage d'un instant t sachant que $s \in \mathcal{M}_{a,b}$ est maximum pour $|t-s| = 2b$.

Démonstration. On vérifie facilement que la fonction $r \mapsto \sqrt{a(r-b)} + \sqrt{b(r-a)}$ est concave sur $[a, +\infty[$, que sa valeur en $a+b$ est $a+b$ et que sa dérivée en $a+b$ vaut 1. Par conséquent, pour tout $r \in [a, +\infty[$, $\sqrt{a(r-b)} + \sqrt{b(r-a)} \leq r$, d'où $h_{a,b}(r) \leq 1/(\pi\sqrt{ab})$.

Par ailleurs, on vérifie facilement que la fonction $r \mapsto r^{-1}\sqrt{r-b}$ est strictement croissante sur $[b, 2b]$, strictement décroissante sur $[2b, +\infty[$, si bien que le maximum de $\pi\sqrt{b}h_{a,b}$ sur $[b, a]$ est majoré par $1/2\sqrt{b}$, avec égalité lorsque $a \geq 2b$. Pour que ce maximum excède $1/\sqrt{a}$, il faut et il suffit que $a > 4b$. \square

On peut se demander si le processus ponctuel $\mathcal{M}_{a,b}$ est déterminantal, comme par exemple l'ensemble des zéros d'une série entière à coefficients indépendants de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ étudié dans [11]. La réponse est négative.

Remarque 7 Le processus ponctuel $\mathcal{M}_{a,b}$ n'est pas déterminantal : on ne peut pas trouver d'application symétrique K de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} tel que les fonctions de corrélation soient données par $f_n(t_1, \dots, t_n) = \det(K(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Démonstration. En effet, si une telle application K existait, elle devrait vérifier pour tout $t \in \mathbf{R}$

$$K(t, t) = f_1(t) = c \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\pi\sqrt{ab}}$$

et pour tout $s, t \in \mathbf{R}$

$$c^2 - K(s, t)^2 = f_2(s, t)$$

Mais $f_n(t_1, \dots, t_n) > 0$ si et seulement si t_1, \dots, t_n sont à distance $> b$ les uns des autres. On aurait donc $K(0, b) = \xi c$, $K(b, 2b) = \eta c$, $K(0, 2b) = \zeta c$ avec $|\xi| = |\eta| = 1$ et $|\zeta| < 1$, d'où

$$f_3(0, b, 2b) = c^3 \begin{vmatrix} 1 & \xi & \zeta \\ \xi & 1 & \eta \\ \zeta & \eta & 1 \end{vmatrix} = -c^3(1 - 2\xi\eta\zeta + \zeta^2) < 0,$$

ce qui est absurde. \square

4 Indépendance et loi des durées entre les points de $\mathcal{M}_{a,b}$

La forme des fonctions de corrélation, et plus précisément le fait que la fonction de corrélation à n points se factorise en $f_n(t_1, \dots, t_n) = c h(t_2 - t_1) \cdots h(t_n - t_{n-1})$ pour $t_1 < \dots < t_n$ permet de montrer que les durées successives entre les instants de $\mathcal{M}_{a,b}$ sont indépendantes et de même loi. Ces instants forment un processus de renouvellement stationnaire, comme le processus des h -extrema introduit par J. Neveu et J. Pitman dans [10]. Mais la loi des durées entre les instants successifs de $\mathcal{M}_{a,b}$ est plus compliquée que la loi des durées entre les h -extrema successifs, qui a pour transformée de Laplace $\theta \mapsto 1/\text{ch}(h\sqrt{2\theta})$.

Théorème 8 (Loi de $\mathcal{M}_{a,b}$)

Notons $\dots < T_{-1} < T_0 < T_1 < T_2 < \dots$ les instants successifs de $\mathcal{M}_{a,b}$ avec $T_0 \leq 0 < T_1$. Alors

- Les durées $\dots, T_{-1} - T_{-2}, T_0 - T_{-1}, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \dots$ sont indépendantes, de même loi et forment une suite indépendante du couple (T_0, T_1) .
- La durée $T_2 - T_1$ possède une densité donnée par

$$g_{a,b}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} h_{a,b}^{*n}(r)$$

où $h_{a,b}$ est la fonction donnée dans le théorème 5.

- La variable (T_0, T_1) possède une densité donnée par

$$f_{a,b}(t_0, t_1) = \frac{\mathbf{I}_{t_0 \leq 0 \leq t_1}}{\pi \sqrt{ab}} g_{a,b}(t_1 - t_0).$$

Démonstration. Dans toute la démonstration, nous omettrons les indices a, b et nous poserons $c = 1/(\pi \sqrt{ab})$. La démonstration comprend deux étapes.

1. Commençons par obtenir la loi d'un n -uplet (T_1, \dots, T_n) . Le passage des fonctions de corrélation à la loi de (T_1, \dots, T_n) se fait par des arguments classiques figurant par exemple dans [4] au chapitre 5, section 4 « moment measures and product densities », notamment l'exemple 5.4(b). Voyons ci-dessous une démonstration directe, inspirée d'idées qui m'ont été suggérées par J. Brossard.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, notons $D_n = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n : t_1 < \dots < t_n\}$. A l'aide du théorème des classes monotones, on vérifie que pour tout borélien $C \subset D_n$,

$$\mathbf{E}[\text{Card}((\mathcal{M}_{a,b})^n \cap C)] = \int_C f_n(t_1, \dots, t_n) dt_1 \cdots dt_n.$$

Calculons la loi de (T_1, T_2) ; un calcul semblable fournit la loi de (T_1, \dots, T_n) , la seule différence étant la longueur des formules.

Soient $I_1 = [a_1, b_1]$ et $I_2 = [a_2, b_2]$ des intervalles de longueur $< b$ dont les bornes vérifient $0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2$. Notons $J_1 =]0, a_1[$ et $J_2 =]b_1, a_2[$. Comme I_1 et I_2 contiennent au plus un point de $\mathcal{M}_{a,b}$, on a

$$\mathbf{I}_{[T_1 \in I_1 ; T_2 \in I_2]} = \mathbf{I}_{[N(J_1)=0 ; N(I_1)=1 ; N(J_2)=0 ; N(I_2)=1]}.$$

En utilisant le fait que $0^0 = 1$, $0^m = 0$ pour $m \geq 1$, et la formule du binôme, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{[T_1 \in I_1 ; T_2 \in I_2]} &= (1-1)^{N(J_1)} N(I_1) (1-1)^{N(J_2)} N(I_2) \\ &= \sum_{k,l \in \mathbf{N}} (-1)^{k+l} \binom{N(J_1)}{k} N(I_1) \binom{N(J_2)}{l} N(I_2) \\ &= \sum_{k,l \in \mathbf{N}} (-1)^{k+l} \text{Card}((\mathcal{M}_{a,b})^{k+l+2} \cap C_{k,l}), \end{aligned}$$

avec $C_{k,l} = D_{k+l+2} \cap J_1^k \times I_1 \times J_2^l \times I_2$. En passant aux espérances, on obtient donc

$$P[T_1 \in I_1 ; T_2 \in I_2] = \sum_{k,l \in \mathbf{N}} (-1)^{k+l} e_{k,l}$$

avec

$$\begin{aligned} e_{k,l} &= \mathbf{E}[\text{Card}((\mathcal{M}_{a,b})^{k+l+2} \cap C_{k,l})] \\ &= \int_{C_{k,l}} f_{k+l+2}(u_1, \dots, u_k, t_1, v_1, \dots, v_l, t_2) du_1 \cdots du_k dt_1 dv_1 \cdots dv_l dt_2 \\ &= \int_{I_1 \times I_2} \left(\int_{0 < u_1 < \dots < u_k < a_1} c h(u_2 - u_1) \cdots h(u_k - u_{k-1}) h(t_1 - u_k) du_1 \cdots du_k \right) \\ &\quad \left(\int_{b_1 < v_1 < \dots < v_l < a_2} h(v_1 - t_1) h(v_2 - v_1) \cdots h(v_l - v_{l-1}) h(t_2 - v_l) dv_1 \cdots dv_l \right) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Comme le support de h est contenu dans $[b, +\infty[$ et comme les intervalles I_1 et I_2 sont de longueur $< b$, on ne change pas les intégrales ci-dessus en remplaçant les domaines d'intégration donnés par les inégalités

$$0 < u_1 < \dots < u_k < a_1 \quad \text{et} \quad b_1 < v_1 < \dots < v_l < a_2$$

par les domaines légèrement plus gros définis par

$$0 < u_1 < \dots < u_k < t_1 \quad \text{et} \quad t_1 < v_1 < \dots < v_l < t_2.$$

Les intégrales obtenues s'interprètent comme des produits de convolution et on trouve

$$e_{k,l} = \int_{I_1 \times I_2} (c \mathbf{I}_{\mathbf{R}_+} * h^{*k})(t_1) h^{*(l+1)}(t_2 - t_1) dt_1 dt_2.$$

Ainsi,

$$P[T_1 \in I_1 ; T_2 \in I_2] = \int_{I_1 \times I_2} \left(\sum_{k \in \mathbf{N}} (-1)^k c \mathbf{I}_{\mathbf{R}_+} * h^{*k}(t_1) \right) \left(\sum_{l \in \mathbf{N}} (-1)^l h^{*(l+1)}(t_2 - t_1) \right) dt_1 dt_2,$$

ce qui montre que les variables aléatoires T_1 et $T_2 - T_1$ sont indépendantes, que $T_2 - T_1$ admet comme densité

$$g = \sum_{l \in \mathbf{N}} (-1)^l h^{*(l+1)} = \sum_{k \in \mathbf{N}^*} (-1)^{k-1} h^{*k}$$

et que T_1 admet comme densité

$$f = \sum_{k \in \mathbf{N}} (-1)^k c \mathbf{I}_{\mathbf{R}_+} * h^{*k} = c (\mathbf{I}_{\mathbf{R}_+} - \mathbf{I}_{\mathbf{R}_+} * g).$$

Remarquons que les interversions des sommes avec les espérances ou avec les intégrales ne posent pas de problème : toutes les sommes se ramènent à des sommes finies du fait que $N(J) \leq \text{Ent}(L/b) + 1$ si J est un intervalle de longueur L et grâce au fait que h est à support dans $[b, +\infty[$.

2. Déterminons maintenant la loi du $2n$ -uplet $(T_{-n+1}, \dots, T_0, T_1, \dots, T_n)$.

Soient $I_{-n+1}, \dots, I_0, I_1, \dots, I_n$ des intervalles de \mathbf{R} , non enchevêtrés, rangés dans cet ordre tels que 0 majore I_0 et minore I_1 . Notons m la borne inférieure de I_{-n+1} et supposons que I_{-n+1} est de longueur $< b$. Dans ce cas, I_{-n+1} contient au plus un point de $\mathcal{M}_{a,b}$, si bien que l'événement

$$[\forall k \in [-n+1 \dots n], T_k \in I_k]$$

signifie que T_{-n+1}, \dots, T_n sont les instants successifs de $\mathcal{M}_{a,b}$ après m . Par stationnarité de $\mathcal{M}_{a,b}$, cet événement a pour probabilité

$$P[\forall k \in [1 \dots 2n], T_k \in J_k] = \int_{J_1 \times \dots \times J_{2n}} f(s_1)g(s_2 - s_1) \cdots g(s_{2n} - s_{2n-1}) ds_1 \cdots ds_{2n}$$

avec $J_k = I_{k-n} - m$ pour tout $k \in [1 \dots 2n]$. Mais $J_1 \subset [0, b]$, d'où $f(s_1) = c$ pour tout $s_1 \in J_1$. En effectuant le changement de variables $s_k = t_{k-n} - m$, on obtient donc

$$P[\forall k \in [-n+1 \dots n], T_k \in I_k] = \int_{I_{-n+1} \times \dots \times I_n} c \prod_{|k| \leq n-1} g(t_{k+1} - t_k) dt_{-n+1} \cdots dt_n.$$

Comme g est nulle sur \mathbf{R}_- , on en déduit que (T_{-n+1}, \dots, T_n) admet pour densité

$$(t_{-n+1}, \dots, t_n) \mapsto \frac{\mathbf{1}_{t_0 < 0 \leq t_1}}{\pi \sqrt{ab}} \prod_{|k| \leq n-1} g(t_{k+1} - t_k),$$

d'où le résultat. □

Remarque. L'invariance de la loi de $\mathcal{M}_{a,b}$ par translation permet de déduire facilement la densité de (T_0, T_1) de celle de T_1 . En effet, pour $t_0 < 0 < t_1$,

$$P[T_0 \leq t_0; T_1 > t_1] = P[\mathcal{M}_{a,b} \cap]t_0, t_1[= \emptyset] = P[\mathcal{M}_{a,b} \cap]0, t_1 - t_0[= \emptyset] = P[T_1 > t_1 - t_0].$$

Dans la suite, nous allons démontrer autrement l'indépendance des durées entre les points successifs de $\mathcal{M}_{a,b}$. Pour cela, nous allons nous intéresser à l'ensemble $\mathcal{M}_{a,0} = \{t \in \mathbf{R} : U_t \geq a\}$ des instants qui sont des records depuis une durée au moins égale à a . L'étude de cet ensemble qu'on pourrait qualifier de « fermé stationnaire régénératif » se ramène à celle du fermé régénératif $\mathcal{R}_a = \{t \in \mathbf{R}_+ : U_t \geq \min(t, a)\}$.

5 Le fermé régénératif \mathcal{R}_a

Dans cette partie, nous notons $A_t^a = \max\{B_s ; s \in [(t-a)_+, t]\}$ pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, si bien que $\mathcal{R}_a = \{t \in \mathbf{R}_+ : A_t^a = B_t\}$. Pour ne pas alourdir les notations, nous omettrons souvent l'indice a lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Proposition 9 *Le fermé \mathcal{R}_a est régénératif dans la filtration naturelle de $(B_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$, notée $(\mathcal{F}_t^B)_{t \in \mathbf{R}_+}$.*

Démonstration. Comme \mathcal{R}_a est l'ensemble des zéros de $(A_t - B_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$, on en déduit que \mathcal{R}_a est prévisible (donc progressif) dans la filtration naturelle de B .

Soient $r > 0$ et $D_r = \inf(\mathcal{R}_a \cap]r, +\infty[)$. Notons $B'_t = B_{D_r+t} - B_{D_r}$, $A'_t = \max\{B'_s ; s \in [(t-a)_+, t]\}$ pour tout $t \in \mathbf{R}_+$ et $\mathcal{R}'_a = \{t \in \mathbf{R}_+ : A'_t = B'_t\}$. Alors pour tout $r \geq 0$,

$$D_r + t \in \mathcal{R}_a \iff B_{D_r+t} = \max\{B_s ; s \in [(D_r + t - a)_+, D_r + t]\}$$

Mais le maximum de B sur l'intervalle $[(D_r+t-a)_+, D_r+t]$ est aussi le maximum de B sur l'intervalle $[D_r + (t-a)_+, D_r+t]$. En effet, si $t \leq a$, alors $(D_r - a)_+ \leq (D_r + t - a)_+ \leq D_r$ donc $B_{D_r} = \max\{B_s ; s \in [(D_r + t - a)_+, D_r]\}$; si $t \geq a$, il n'y a rien à prouver. Donc

$$D_r + t \in \mathcal{R}_a \iff B'_t = \max\{B'_s ; s \in [(t-a)_+, +t]\}$$

ce qui montre que $(\mathcal{R}_a - D_r)_+ = \mathcal{R}'_a$ est indépendant de $\mathcal{F}_{D_r}^B$ et de même loi que \mathcal{R}_a . \square

Proposition 10 (*Propriétés du processus $(A_t^a)_{t \in \mathbf{R}_+}$*)

1. Le processus $(A_t^a)_{t \in \mathbf{R}_+}$ est continu et à variation localement bornée.
2. La décomposition $(A_t^a)_{t \in \mathbf{R}_+}$ en somme d'un processus croissant et d'un processus décroissant s'écrit

$$A_t^a = \int_0^t \mathbf{I}_{[A_s^a = B_s]} dA_s^a + \int_0^t \mathbf{I}_{[A_s^a = B_{s-a}]} dA_s^a.$$

3. Le processus $L^a = \int_0^\cdot \mathbf{I}_{[A_s^a = B_s]} dA_s^a$ est le temps local symétrique en 0 de la semimartingale $(A_t^a - B_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$.

Démonstration. La démonstration comporte plusieurs étapes.

La continuité du processus $(A_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ est évidente.

L'ensemble des instants t tels que $A_t > B_t$ est un ouvert de \mathbf{R}_+ et le processus $(A_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ est décroissant sur chaque composante connexe de cet ouvert. En effet, si $A_{t_0} > B_{t_0}$, alors par continuité de B , $A_t = \max\{B_s ; s \in [(t-a)_+, t_0]\}$ au voisinage de t_0 . De même, l'ensemble des instants t tels que $A_t > B_{(t-a)_+}$ est un ouvert de \mathbf{R}_+ et le processus $(A_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ est croissant sur chaque composante connexe de cet ouvert.

Définissons une suite croissante de temps d'arrêt $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ par $T_0 = 0$ et

$$T_{2n+1} = \inf\{t > T_{2n} : A_t = B_{(t-a)_+}\}.$$

$$T_{2n+2} = \inf\{t \geq T_{2n+1} : A_t = B_t\}.$$

D'après les remarques précédentes, le processus A est croissant sur chaque intervalle $[T_{2n}, T_{2n+1}]$, et décroissant sur chaque intervalle $[T_{2n+1}, T_{2n+2}]$. Par ailleurs, presque sûrement sur l'événement $[T_{2n} < \infty]$, pour tout $t \in]T_{2n}, T_{2n+1} + a]$

$$A_t \geq \max\{B_s ; s \in [T_{2n}, t]\} > B_{T_{2n}} = A_{T_{2n}} \geq B_{(t-a)_+}$$

ce qui entraîne que $T_{2n+1} \geq T_{2n} + a$. Par conséquent $T_n \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$. Ainsi, le processus A est monotone par morceaux.

L'intersection des fermés $\{t \in \mathbf{R}_+ : A_t = B_t\}$ et $\{t \in \mathbf{R}_+ : A_t = B_{(t-a)_+}\}$ est au plus dénombrable : elle est contenue dans l'ensemble des instants T_n et même dans l'ensemble des instants de la forme T_{2n} , puisque l'égalité $A_{T_{2n+1}} = B_{T_{2n+1}}$ entraîne $T_{2n+2} = T_{2n+1}$.

Comme le processus $(A_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ est constant sur tout intervalle où A_t est différent de B_t et B_{t-a} , il se décompose sous la forme

$$A_t = \int_0^t \mathbf{I}_{[A_s=B_s]} dA_s + \int_0^t \mathbf{I}_{[A_s=B_{s-a}]} dA_s.$$

Le temps local symétrique en 0 de la semi-martingale $(A_t - B_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ est donné par la formule de Tanaka

$$A_t - B_t = A_0 - B_0 + \int_0^t \operatorname{sgn}(A_s - B_s) d(A_s - B_s) + L_t,$$

avec la convention $\operatorname{sgn}(0) = 0$. Comme pour tout $s > 0$, $P[A_s = B_s] = 0$, l'ensemble des $s \in \mathbf{R}_+$ tels que $A_s = B_s$ est presque sûrement de mesure nulle. En utilisant la décomposition du processus $(A_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ démontrée plus haut, on obtient

$$A_t - B_t = \int_0^t \mathbf{I}_{[A_s=B_{(s-a)_+}]} dA_s - B_t + L_t,$$

d'où par différence,

$$L_t = \int_0^t \mathbf{I}_{[A_s=B_s]} dA_s,$$

ce qui termine la démonstration. \square

Remarque 11 *Presque sûrement, l'intersection des fermés $\{t \in \mathbf{R}_+ : A_t^a = B_t\}$ et $\{t \in \mathbf{R}_+ : A_t^a = B_{(t-a)_+}\}$ est réduite à $\{0\}$.*

Bien que ce résultat ne soit pas utile pour la suite, nous donnons une démonstration, qui utilise la fragmentation en intervalles associée à l'excursion brownienne, (voir [2]).

Démonstration. Grâce à la propriété de Markov, il suffit de montrer que presque sûrement, T_2 n'appartient pas à $\{t \in \mathbf{R}_+ : A_t = B_{(t-a)_+}\}$.

Notons ϵ la première excursion de longueur $\geq a$ du mouvement brownien réfléchi $(S_t - B_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$, Λ sa longueur et \mathbf{e} l'excursion brownienne de longueur 1 obtenue par changement d'échelle à partir de ϵ . Les variables aléatoires Λ et \mathbf{e} sont indépendantes, et $P[\Lambda > x] = \sqrt{a/x}$ pour tout $x \geq a$. En particulier $\Lambda > a$ presque sûrement.

L'excursion ϵ débute à l'instant $T_1 - a$ et finit après l'instant T_2 . Plus précisément, regardons la fragmentation en intervalles associée à l'excursion ϵ : pour tout $h > 0$, on note F_h la collection des intervalles d'excursions de $(S_t - B_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ au-dessus de h contenues dans l'excursion ϵ . Alors T_2 est la fin du premier intervalle de longueur $> a$ au moment où celui-ci se casse en deux intervalles de longueur $\leq a$. Pour que $A_{T_2} = B_{T_2-a}$, il faudrait que la fragmentation associée à l'excursion \mathbf{e} produise un intervalle de longueur exactement égale à a/Λ .

Mais si l'on choisit U uniformément dans $[0, 1]$ et indépendamment de \mathbf{e} , on sait que la longueur de l'intervalle contenant U au cours de la fragmentation évolue à un changement de temps près comme $e^{-\xi}$, où ξ est un subordonateur. Le subordonateur ξ ne dépend que de \mathbf{e} et de U et est donc indépendant de Λ . Comme il est sans dérive, $P[\exists t \in \mathbf{R}_+ : e^{-\xi t} = a/\Lambda] = 0$, d'où $P[B_{T_2} = B_{T_2-a}] = 0$. \square

On sait que tout fermé régénératif parfait est l'image fermée d'un subordonateur, unique à changement de temps linéaire près : voir le théorème 2.1 de [1], démontré dans

l'article [9] de B. Maisonneuve. Une façon d'obtenir le subordonateur est de construire un temps local associé au fermé régénératif et de prendre son inverse. Nous allons voir que le temps local L^a fait l'affaire, bien que qu'il soit défini comme temps local de la semimartingale $A^a - B$.

Proposition 12 *L'inverse continu à droite du processus $L^a = \int_0^t \mathbf{I}_{[A_s^a=B_s]} dA_s^a$, défini par $\sigma_l^a = \inf\{t \geq 0 : L_t^a > l\}$ est un subordonateur dont l'image fermée est \mathcal{R}_a .*

Démonstration. L'image fermée de σ^a est égale au support de la mesure de Stieltjes associée à L , qui est inclus dans $\mathcal{R}_a = \{t \in \mathbf{R}_+ : A_t = B_t\}$. A l'aide de la propriété forte de Markov, on montre que pour tout rationnel $r > 0$, l'instant $D_r = \inf(\mathcal{R}_a \cap]r, +\infty[)$ est (presque sûrement) un instant de croissance des processus A et L , donc appartient à l'image de σ^a . Comme \mathcal{R}_a est d'intérieur vide, tout instant de \mathcal{R}_a peut être approché par un instant de la forme D_r , si bien que \mathcal{R}_a est contenu dans l'image fermée de σ^a .

Comme $L_t \geq A_t \geq B_t$ pour tout $t \in \mathbf{R}_+$ et comme presque sûrement, les trajectoires browniennes ne sont pas bornées, le processus croissant L tend vers ∞ , si bien que les temps d'arrêt σ_l^a sont finis presque sûrement. Fixons $l > 0$ et notons pour $t \geq 0$

$$\begin{aligned} B'_t &= B_{\sigma_l^a+t} - B_{\sigma_l^a}, \\ A'_t &= \max\{B'_s ; s \in [(t-a)_+, t]\} \\ L'_t &= \int_0^t \mathbf{I}_{[A'_s=B'_s]} dA'_s. \end{aligned}$$

Comme dans la proposition 1, on montre que pour tout $t \geq 0$, $A_{\sigma_l^a+t} = B_{\sigma_l^a} + A'_t$ grâce à l'égalité $A_{\sigma_l^a} = B_{\sigma_l^a}$. On en déduit que

$$L_{\sigma_l^a+t} - A_{\sigma_l^a} = \int_0^t \mathbf{I}_{[A_{\sigma_l^a+s} = B_{\sigma_l^a+s}]} dA_{\sigma_l^a+s} = \int_0^t \mathbf{I}_{[A'_s=B'_s]} dA'_s = L'_t.$$

Par conséquent, le processus $\sigma_{l+}^a - \sigma_l^a$ est l'inverse continu à droite de L' . Ce processus est donc indépendant de $\mathcal{F}_{\sigma_l^a}^B$ et a même loi que σ^a . \square

Nous décrirons plus loin la mesure de Lévy du subordonateur σ^a . Donnons déjà un résultat immédiat.

Proposition 13 *Soit ν_a la mesure de Lévy du subordonateur σ^a . Pour tout $b \in]0, a]$,*

$$\nu_a[b, \infty[= \sqrt{\frac{2}{\pi b}}.$$

Démonstration. On vérifie facilement que le processus A coïncide avec le processus S défini par $S_t = \max\{B_s ; s \in [0, t]\}$ jusqu'à l'instant $T_1 = \inf\{t \geq a : A_t = B_{t-a}\}$, qui correspond au premier palier de longueur $\geq a$ des deux processus. Leurs inverses continus à droite coïncident donc jusqu'au premier saut de taille $\geq a$, qui a lieu au même moment pour les deux. Donc les mesures de Lévy de ces deux subordonateurs donnent la même mesure à l'intervalle $[b, +\infty[$ pour tout $b \in]0, a]$, puisque le premier saut de hauteur $\geq b$ d'un subordonateur de mesure de Lévy ν se produit au bout d'un temps exponentiel de paramètre $\nu[b, +\infty[$. \square

6 Lien entre \mathcal{R}_a et $\mathcal{M}_{a,b}$ pour $a \geq b > 0$

Supposons que $a \geq b > 0$. Sur l'événement presque sûr où les maxima locaux sont à des hauteurs toutes différentes (voir proposition 1), on vérifie facilement l'équivalence suivante, valable pour tout $t > a$:

$$t \in \mathcal{M}_{a,b} \iff \mathcal{R}_a \cap [t, t+b[= \{t\}.$$

Par conséquent la trace de $\mathcal{M}_{a,b}$ sur $]a, +\infty[$ est l'ensemble des débuts des intervalles de longueur $\geq b$ dans l'ouvert $\mathcal{R}_a^c \cap]a, +\infty[$.

Ces intervalles correspondent aux sauts de hauteur $\geq b$ du subordonateur σ^a après le franchissement de a . Plus précisément, les éléments de $\mathcal{M}_{a,b} \cap]a, +\infty[$ sont les instants $T'_n = \sigma_{(R_n)-}^a$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ où $(R_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est la suite définie par $R_0 = \inf\{l \geq 0 : \sigma_l^a > a\}$ et $R_n = \inf\{l > R_{n-1} : \Delta\sigma_l^a \geq b\}$. Comme le processus des sauts $(\Delta\sigma_l^a)_{l \geq 0}$ est un processus de Poisson ponctuel, on en déduit que les durées $T'_2 - T'_1, T'_3 - T'_2, \dots$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, indépendante de T'_1 .

Soit ν_a la mesure de Lévy du subordonateur σ^a . On peut exprimer la transformée de Laplace de $T'_2 - T'_1$ à l'aide ν_a en écrivant

$$T'_2 - T'_1 = \Delta\sigma_{R_1}^a + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{R_1 < l < R_2} \Delta\sigma_l^a \mathbf{I}_{[\Delta\sigma_l^a \geq \epsilon]}.$$

En effet :

- le saut $\Delta\sigma_{R_1}^a$ a pour loi $\nu_a(\cdot | [b, \infty[)$;
- les sauts successifs de hauteur $\geq \epsilon$ effectués par σ^a après l'instant R_1 ont pour loi $\nu_a(\cdot | [\epsilon, \infty[)$;
- toutes ces variables aléatoires sont indépendantes.

Le nombre de sauts de hauteur $\geq \epsilon$ jusqu'au premier saut de hauteur $\geq b$ suit une loi géométrique de paramètre $\nu_a[b, \infty[/ \nu_a[\epsilon, \infty[$. Donc pour tout $\theta \geq 0$, $\exp[-\theta(T'_2 - T'_1)]$ est la limite quand $\epsilon \rightarrow 0$ de

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}_+^*} e^{-\theta x} \nu_a(dx | [b, \infty[) &\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_a[b, \infty[}{\nu_a[\epsilon, \infty[} \left(\frac{\nu_a[\epsilon, b[}{\nu_a[\epsilon, \infty[} \right)^{n-1} \left(\int_{\mathbf{R}_+^*} e^{-\theta x} \nu_a(dx | [\epsilon, b[) \right)^{n-1} \\ &= \int_{[b, \infty[} e^{-\theta x} \nu_a(dx) \frac{1}{\nu_a[\epsilon, \infty[} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\int_{[\epsilon, b[} e^{-\theta x} \nu_a(dx)}{\nu_a[\epsilon, \infty[} \right)^{n-1} \\ &= \frac{\int_{[b, \infty[} e^{-\theta x} \nu_a(dx)}{\nu_a[\epsilon, \infty[- \int_{[\epsilon, b[} e^{-\theta x} \nu_a(dx)}. \end{aligned}$$

Par stationnarité des accroissements de B , la loi de $\mathcal{M}_{a,b}$ est invariante par translation si bien que la suite $(T'_n - a)_{n \geq 1}$ a même loi que la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ où $T_1 < T_2 < \dots$ sont les instants successifs de $\mathcal{M}_{a,b} \cap \mathbf{R}_+^*$. On peut donc énoncer le résultat suivant.

Proposition 14 Soient $a \geq b > 0$. Notons $T_1 < T_2 < \dots$ les instants successifs de $\mathcal{M}_{a,b} \cap \mathbf{R}_+^*$. Les durées $T_2 - T_1, T_3 - T_2, \dots$ sont indépendantes entre elles et avec T_1 , de même loi ; leur transformée de Laplace est donnée par

$$\mathbf{E}[e^{-\theta(T_2 - T_1)}] = \frac{\int_{[b, \infty[} e^{-\theta x} \nu_a(dx)}{\int_{\mathbf{R}_+^*} (1 - \mathbf{I}_{[x < b]} e^{-\theta x}) \nu_a(dx)}$$

où ν_a est la mesure de Lévy du subordonateur σ^a .

Remarque : une autre preuve du théorème 8.

Nous venons de redémontrer l'indépendance des variables $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \dots$ et l'équidistribution des durées $T_n - T_{n-1}$. Une fois ce point établi, on retrouve facilement la loi $\mu_{a,b}$ de T_1 et la loi $\nu_{a,b}$ de $T_2 - T_1$ à partir du théorème 5 : pour tout $t > s > 0$,

$$\frac{ds}{\pi\sqrt{ab}} = \mathbf{E}[N_{a,b}(ds)] = \sum_{m=1}^{\infty} P[T_m \in ds] = \sum_{m=1}^{\infty} (\mu_{a,b} * \nu_{a,b}^{*(m-1)})(ds)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{ds}{\pi\sqrt{ab}} h_{a,b}(t-s)dt &= \mathbf{E}[N_{a,b}(ds)N_{a,b}(dt)] = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P[T_m \in ds ; T_{m+n} \in dt] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_{a,b} * \nu_{a,b}^{*(m-1)})(ds) \nu_{a,b}^{*n}(dt-s) \end{aligned}$$

d'où

$$h_{a,b}(r)dr = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_{a,b}^{*n}(dr)$$

On en déduit les égalités suivantes pour les transformées de Laplace

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi\sqrt{ab}\theta} &= \frac{\mathcal{L}\mu_{a,b}(\theta)}{1 - \mathcal{L}\nu_{a,b}(\theta)} \\ \mathcal{L}h_{a,b}(\theta) &= \frac{\mathcal{L}\nu_{a,b}(\theta)}{1 - \mathcal{L}\nu_{a,b}(\theta)} \end{aligned}$$

On retrouve ainsi les lois $\nu_{a,b}$ et $\mu_{a,b}$ décrites dans le théorème 8 par l'intermédiaire de leur transformée de Laplace.

7 Description de la mesure de Lévy du subordonateur σ^a

Dans toute cette partie, on étudie la fonction G_a définie par $G_a(r) = \nu_a]r, \infty[$ pour $r > 0$ et $G_a(r) = 0$ pour $r \leq 0$.

7.1 Equations de convolution vérifiées par G_a

En utilisant les égalités ci-dessus et la proposition 14, on obtient lorsque $a \geq b > 0$,

$$\mathcal{L}h_{a,b}(\theta) = \frac{\mathcal{L}\nu_{a,b}(\theta)}{1 - \mathcal{L}\nu_{a,b}(\theta)} = \frac{\int_{[b, \infty[} e^{-\theta x} \nu_a(dx)}{\int_{\mathbf{R}_+^*} (1 - e^{-\theta x}) \nu_a(dx)}.$$

Comme

$$\int_{\mathbf{R}_+^*} (1 - e^{-\theta x}) \nu_a(dx) = \int_0^\infty \theta e^{-\theta r} G_a(r) dr = \theta \mathcal{L}G_a(\theta),$$

l'égalité précédente s'écrit aussi

$$\mathcal{L}h_{a,b}(\theta) \mathcal{L}G_a(\theta) = \frac{1}{\theta} \int_{[b, \infty[} e^{-\theta x} \nu_a(dx),$$

soit en termes de convolution :

$$h_{a,b} * G_a = \mathbf{I}_{\mathbf{R}_+} * (\mathbf{I}_{[b,\infty[} \nu_a).$$

Pour tout $x \geq 0$, on a donc

$$\int_0^x h_{a,b}(y) G_a(x-y) dy = G_a(b) - G_a(x \vee b). \quad (1)$$

Comme $h_{a,b}(y) = 0$ pour $y \leq b$, cette égalité donne la valeur de $G_a(x)$ pour $x \geq b$ en fonction de $G_a(b)$ et des valeurs $G_a(z)$ pour $z \in [0, x-b]$. Comme $G_a(x) = \sqrt{2/\pi x}$ pour tout $x \in [0, a]$, G_a est connue *a fortiori* sur $[0, b]$, et la relation (1) permet de calculer par récurrence la valeur de G_a sur les intervalles de la forme $[nb, (n+1)b]$ avec $n \in \mathbf{N}$. Les formules deviennent vite compliquées même si elles se simplifient un peu dans le cas où $b = a$.

Un autre cas particulier plus intéressant est le cas limite où $b \rightarrow 0$. En effet, pour tout $b \leq a$, $\sqrt{b}G_a(b) = \sqrt{2\pi}$ et pour tout $y > 0$, $\pi\sqrt{b}h_{a,b}(r) \rightarrow (y \wedge a)^{-1/2}$ quand $b \rightarrow 0$. En multipliant par $\pi\sqrt{b}$ l'égalité 1 et en faisant tendre b vers 0, on obtient donc par convergence dominée

$$\int_0^x (y \wedge a)^{-1/2} G_a(x-y) dy = \sqrt{2\pi} \quad (2)$$

Cette égalité fournit une expression simple de la transformée de Laplace de G_a .

7.2 Expressions de la transformée de Laplace de G_a et applications

Théorème 15 *La transformée de Laplace de G_a est donnée par*

$$\mathcal{L}G_a(\theta) = \sqrt{2\pi a} M\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\theta a\right)^{-1}$$

où $M(a, b, \cdot) = {}_1F_1(a, b, \cdot)$ est la fonction hypergéométrique définie par :

$$M(a, b, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{x^n}{n!},$$

en notant $(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1)$.

Démonstration. L'équation 2 ci-dessus entraîne immédiatement l'égalité

$$\mathcal{L}G_a(\theta) \times \int_0^\infty (r \wedge a)^{-1/2} e^{-\theta r} dr = \frac{\sqrt{2\pi}}{\theta}.$$

Mais

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (r \wedge a)^{-1/2} e^{-\theta r} dr &= \int_a^\infty a^{-1/2} e^{-\theta r} dr + \int_0^a r^{-1/2} e^{-\theta r} dr \\ &= \frac{a^{-1/2}}{\theta} e^{-\theta a} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\theta)^n}{n!} \frac{a^{n+1/2}}{n+1/2} \\ &= \frac{a^{-1/2}}{\theta} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\theta a)^n}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\theta a)^n}{(n-1)!(n-1/2)} \right) \\ &= \frac{a^{-1/2}}{\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\theta a)^n}{n!} \left(1 - \frac{n}{n-1/2} \right) \\ &= \frac{a^{-1/2}}{\theta} M\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\theta a\right), \end{aligned}$$

puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$1 - \frac{n}{n-1/2} = \frac{-1/2}{n-1/2} = \frac{(-1/2)_n}{(1/2)_n}.$$

ce qui démontre le théorème □

La transformée de Laplace fournit des indications sur le comportement asymptotique de la queue de G_a . En effet, par prolongement analytique, on déduit du théorème 15 l'égalité

$$\int_0^\infty e^{\theta r} G_a(r) dr = \sqrt{2\pi a} M\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \theta a\right)^{-1}$$

pour tout réel θ tel que $\theta a < \rho$, où ρ est l'unique zéro dans \mathbf{R}_+ de la fonction $M(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \cdot)$. De plus, quand $\varepsilon \rightarrow 0+$,

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon r} e^{\rho r/a} G_a(r) dr = \sqrt{2\pi a} M\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \rho - a\varepsilon\right)^{-1} \sim \frac{\sqrt{2\pi a}}{\lambda a \varepsilon}.$$

avec $\lambda = M(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \rho)$. A l'aide du théorème taubérien de Hardy ou de Karamata (voir [5] au chapitre XIII), on en déduit le résultat suivant.

Proposition 16 *Notons ρ l'unique zéro dans \mathbf{R}_+ de la fonction $M(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \cdot)$ et $\lambda = \frac{\partial}{\partial x} M(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \cdot)(\rho) = M(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \rho)$. Alors quand $x \rightarrow +\infty$,*

$$\int_0^x e^{\rho r/a} G_a(r) dr \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda \sqrt{a}} x.$$

On peut s'attendre à ce que la queue G_a soit suffisamment régulière pour que $e^{\rho r/a} G_a(r)$ ait une limite quand $r \rightarrow +\infty$, ce qui conduit à la conjecture suivante sur le comportement asymptotique de la queue de ν_a .

Conjecture Avec les mêmes notations que ci-dessus,

$$G_a(r) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda \sqrt{a}} e^{-\rho r/a}.$$

Cette conjecture est confortée par la représentation graphique de $\ln G_1$ donnée à la fin de l'article.

De même, si $a \geq b > 0$ et si $T_1 < T_2 < \dots$ sont les instants successifs de $\mathcal{M}_{a,b} \cap \mathbf{R}_+^*$, on peut conjecturer de même que la variable aléatoire $T_2 - T_1$ a une queue (et une densité) à décroissance exponentielle, puisque d'après la proposition 14, on a pour tout $\theta > 0$,

$$1 - \mathbf{E}[e^{-\theta(T_2-T_1)}] = \frac{\int_{[0,\infty[} (1 - e^{-\theta x}) \nu_a(dx)}{\int_{\mathbf{R}_+^*} (1 - \mathbf{I}_{[x < b]}) e^{-\theta x} \nu_a(dx)} = \frac{\sqrt{2\pi} \theta \mathcal{L}G_a(\theta)}{2b^{-1/2} + \int_{[0,b]} (1 - e^{-\theta x}) x^{-3/2} dx}$$

Cette formule s'étend par prolongement analytique à tout $\theta > -\rho/a$, et il existe une constante $C \in \mathbf{R}_+^*$ telle que

$$\mathbf{E}[e^{(\frac{\rho}{a}-\varepsilon)(T_2-T_1)}] \sim C/\varepsilon \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0+.$$

7.3 Expression de G_a sous forme de série

La transformée de Laplace de G_a peut être réécrite comme suit.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}G_a(\theta) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\theta} \left(\int_0^\infty r^{-1/2} e^{-\theta r} dr + \int_a^\infty (a^{-1/2} - r^{-1/2}) e^{-\theta r} dr \right)^{-1} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\theta} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\theta}} + \frac{1}{2\theta} \int_a^\infty r^{-3/2} e^{-\theta r} dr \right)^{-1} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\theta}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}} \int_a^\infty r^{-3/2} e^{-\theta r} dr \right)^{-1}.\end{aligned}$$

Pour tout θ suffisamment grand, on a donc

$$\mathcal{L}G_a(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\theta}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}} \int_a^\infty r^{-3/2} e^{-\theta r} dr \right)^n.$$

Remarquons que l'application

$$\theta \mapsto \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}} \int_a^\infty r^{-3/2} e^{-\theta r} dr \right)^n$$

est la transformée de Laplace du produit de convolution de $r \mapsto (2\pi)^{-1} \mathbf{I}_{[r>0]} r^{-1/2}$ avec $r \mapsto \mathbf{I}_{[r>a]} r^{-3/2}$. Mais pour $r > a$,

$$\int_a^r \frac{dy}{(r-y)^{1/2} y^{3/2}} = \int_a^r \sqrt{\frac{y}{r-y}} \frac{dy}{y^2} = \int_{a/(r-a)}^\infty \sqrt{z} \frac{dz}{r z^2} = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{r-a}{a}},$$

grâce au changement de variable $z = y/(r-y)$ d'où $1/z = r/y - 1$. On déduit des calculs précédents une expression de G_a .

Théorème 17 Notons u et $h_{\infty,a}$ les applications définies par

$$u(r) = \mathbf{I}_{[r>0]} \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \quad \text{et} \quad h_{\infty,a}(r) = \frac{\mathbf{I}_{[r>a]}}{\pi r} \sqrt{\frac{r-a}{a}}.$$

Alors

$$G_a = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (u * h_{\infty,a}^{*n})$$

Remarque. Dans cet énoncé, la notation $h_{\infty,a}$ a été choisie par analogie avec les notations du théorème 5. Cependant nous n'avons pas d'explication à l'égalité formelle $G_a = u - u * g_{\infty,a}$, dans laquelle la convolution par u s'apparente à une intégration fractionnaire.

Calcul de G_a . Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u * h_{\infty,a}^{*n}$ est à support dans $[na, +\infty[$. Pour calculer G_a sur un intervalle $[0, Na]$ avec $N \in \mathbf{N}$, il suffit donc de faire varier n de 0 à $N-1$ dans la série qui intervient dans le théorème 17. Par exemple, pour tout $r \in [0, 2a]$, $G_a(r) = u(r) - u * h_{\infty,a}(r)$.

Or pour tout $r \in [a, +\infty[$,

$$u * h_{\infty,a}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \frac{1}{\pi} \int_a^r \sqrt{\frac{x-a}{r-x}} \frac{dx}{x}.$$

Le changement de variable

$$t = \sqrt{\frac{x-a}{r-x}}, \text{ soit } x = \frac{rt^2 + a}{t^2 + 1},$$

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{2rt}{rt^2 + a} - \frac{2t}{t^2 + 1} \right) dt = \left(\frac{1}{t^2 + 1} - \frac{a}{rt^2 + a} \right) \frac{2dt}{t},$$

montre que pour tout $r \in [a, +\infty[$,

$$u * h_{\infty, a}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{1}{t^2 + 1} - \frac{a}{rt^2 + a} \right) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \left(1 - \sqrt{\frac{a}{r}} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi a}} - \sqrt{\frac{2}{\pi r}}.$$

Pour tout $r \in [a, 2a]$, on a ainsi

$$G_a(r) = u(r) - (u * h_{\infty, a})(r) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi r}} - \sqrt{\frac{2}{\pi a}}.$$

7.4 Représentations graphiques de G_1 et $\ln G_1$

La figure ci-dessous montre le graphe de G_1 , calculé à l'aide de Scilab. Je remercie J.M. Decauwert pour son aide précieuse en la matière. Notons que G_a se déduit de G_1 par changement d'échelle. Plus précisément, la relation $G_a(r) = G_1(r/a)/\sqrt{a}$ découle de l'égalité $\mathcal{L}G_a(\theta) = \sqrt{a}\mathcal{L}G_1(a\theta)$ par injectivité de la transformation de Laplace.

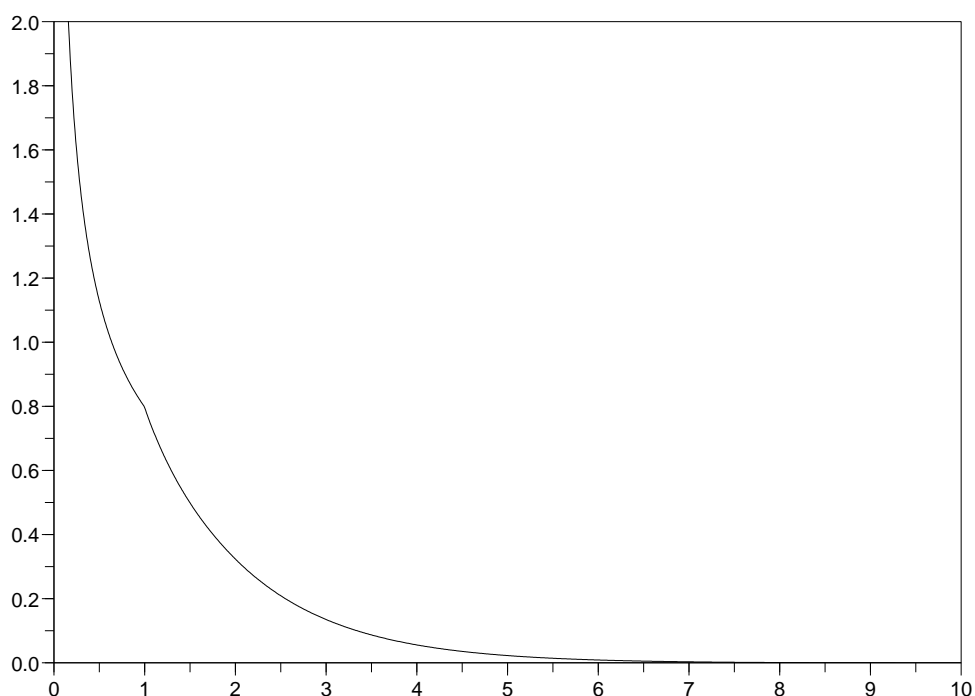


Figure 1. — Représentation graphique de G_1 .

La conjecture sur la croissance exponentielle de G_a faite plus haut peut se réécrire sous la forme $\ln G_1(r) + \rho r \rightarrow \ln(\sqrt{2\pi}/\lambda)$ quand $r \rightarrow +\infty$. Il est donc intéressant de dessiner le graphe de $\ln G_1$. La figure ci-dessous suggère en effet que la courbe représentant $\ln G_1$ possède une asymptote de pente voisine de -0,9. Le graphe a été limité à l'intervalle $[0, 5]$ en raison de problèmes d'instabilité numérique qui apparaissent au-delà.

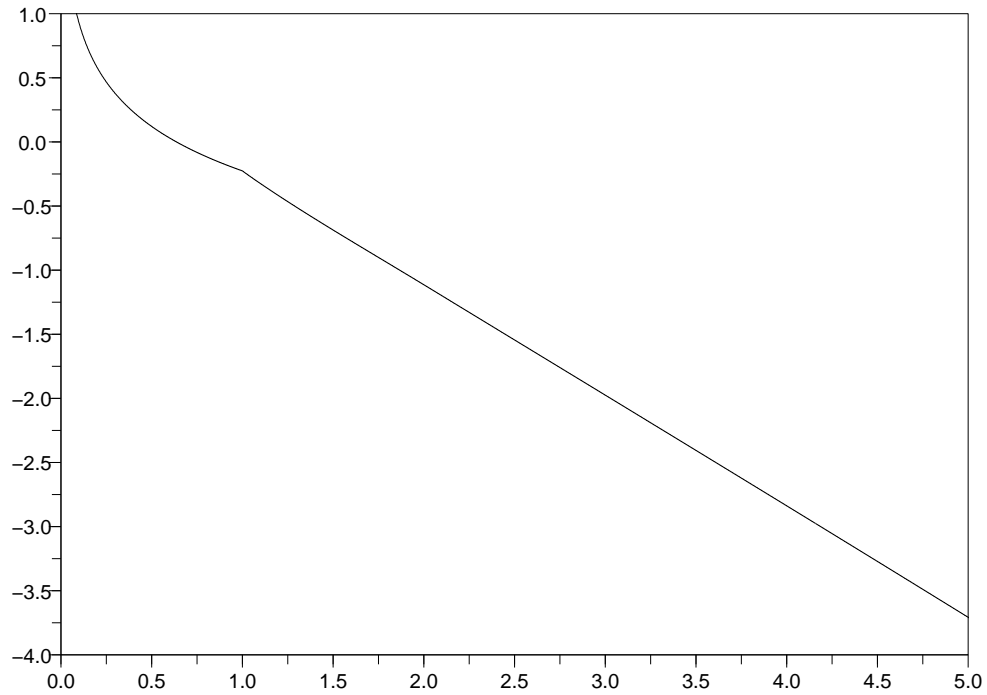


Figure 1. — Représentation graphique de $\ln G_1$

Références

- [1] Bertoin J., *Subordinators : examples and applications*, Lectures on Probability Theory and Statistics (Ecole d'été de Saint-Flour), Lecture Notes in Mathematics 1717 (1999), p. 1-91.
- [2] Bertoin J., *Self-similar fragmentations*, Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics **38**-3, (2002), p. 319-340.
- [3] Csáki E., Földes A., Salminen P., *On the joint distribution of the maximum and its location for a linear diffusion*, Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilité et Statistiques **23**-2 (1987), p. 179-194.
- [4] Daley D. J., Vere-Jones, D., *An introduction to the theory of point processes - Vol.1 ; elementary theory and methods*, Probability and its applications, Springer (2003).
- [5] Feller W., *An introduction to probability theory and its applications*, Volume II, Wiley and Sons, (1966).

- [6] Kallenberg, O., *Foundations of Modern Probability*, second edition Springer Series in Statistics, (2002).
- [7] Levy P., *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Gauthier-Villars, (1948).
- [8] Louchard G., *Mouvement brownien et valeurs propres du laplacien*, Annales de l'institut Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistiques, **4-4** (1968), p. 331-342.
- [9] Maisonneuve B., *Ensembles régénératifs, temps locaux et subordinateurs*, Séminaire de Probabilités V, Lecture Notes in Mathematics **191**, Springer (1971), p. 147-169.
- [10] Neveu J., Pitman J., *Renewal property of the extrema and tree property of the excursion of a one-dimensional brownian motion*. Séminaire de Probabilités XXIII, Lecture Notes in Mathematics **1372**, Springer (1989), p. 239-247.
- [11] Peres Y., Virág B., *Zeros of the i.i.d. Gaussian power series : a conformally invariant determinantal process*, Acta Mathematica **194-1**, Springer (2005), p. 1-35.
- [12] Tsirelson B., *Brownian local minima, random dense countable sets and random equivalence classes*. Electronic Journal of Probability **11** (2006), p. 162-198.

Christophe LEURIDAN
 INSTITUT FOURIER
 Laboratoire de Mathématiques
 UMR5582 (UJF-CNRS)
 BP 74
 38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
 Christophe.Leuridan@ujf-grenoble.fr